Model Examen Algebră Liniară - ianuarie 2026

Nume, prenume..

1. (1p oficiu) Fie V un K spațiu liniar.
   (a) (4p) Definiți nucleul și imaginea unui operator liniar $T : V \to V$.
   (b) (4p) Demonstrați că $KerT$ este subspațiu liniar al lui V.
   (c) (1p) Dacă V are dimensiunea finită n, enunțați teorema ce specifică legătura dintre dimensiunile lui $KerT$ și ImT.

2. (1p oficiu) Spații liniare euclidiene.
   (a) (3p) Definiți produsul scalar pe spațiul liniar real V și norma indusă de acesta. Dați exemplu de un produs scalar pe $\mathbb{R}^2$. Motivați de ce este produs scalar.
   (b) (2p) Enunțați toate proprietățile normei.
   (c) (4p) Demonstrați inegalitatea lui Cauchy, $|<\bar{x},\bar{y}>| \le \| \bar{x} \| \| \bar{y} \|$, $\forall \bar{x},\bar{y} \in V$. Când are loc egalitatea? Motivați!

3. (1p oficiu) Fie forma biliniară $g : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$g(x,y) = x_1y_1 - x_1y_2 + x_1y_3 - x_2y_1 + 3x_2y_2 - 3x_2y_3 + x_3y_1 - 3x_3y_2 + x_3y_3.$$

   (a) (2p) Determinați matricea ei în raport cu baza canonică și demonstrați că g este simetrică.
   (b) (5p) Determinați forma pătratică asociată lui g și aduceți-o la forma canonică printr-o metodă la alegere. Determinați baza în raport cu care forma patratică are forma canonică.
   (c) (2p) Verificați dacă g este produs scalar pe $\mathbb{R}^3$.

4. (1p oficiu) Fie aplicația $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\varphi(x_1,x_2,x_3) = \begin{pmatrix} 3x_1 - x_2 + x_3, & -x_1 + 5x_2 - x_3, & x_1 - x_2 + 3x_3 \end{pmatrix}$.
   (a) (1p) Verificați că φ este operator liniar.
   (b) (1p) Scrieți matricea A a lui φ în raport cu baza canoninică a lui $\mathbb{R}^3$.
   (c) (2p) Demonstrați că φ este inversabil și determinați φ^{-1}.
   (d) (1p) Determinați polinomul caracteristic asociat lui φ. Aflați rădăcinile caracteristice ale lui φ și specificați ordinele lor de multiplicitate.
   (e) (2p) Determinați subspatiile invariante formate din vectori proprii ai lui φ.
   (f) (1p) Este φ diagonalizabil? În caz afirmativ determinați forma diagonală a lui φ și baza în care se obține această formă. În caz negativ, determinați forma canonică Jordan și baza în care φ are această formă.
   (g) (1p) Calculați A^{10}.